# Devoirs de Mathématiques du groupe de M.Beck. [1]

**Commencer par faire ou (refaire) des exercices de niveau terminal** en essayant,autant que faire se peut, de se passer de "prothèse électronique" afin de maîtriser les formules usuelles[2]et savoir les appliquer (sans pour autant tomber dans le pscittacisme, car on vous demandera tout sauf cela). Il n'est peut-être pas inutile de remarquer ici que les énigmes, casse-têtes, jeux logiques etc... de vos magazines préférés peuvent également constituer un bon entrainement car: "jamais nous ne deviendrons mathématiciens, même en retenant par coeur toutes les démonstrations des autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre à son tour toute espèce de problème" (Descartes, in Règle III, pour la direction de l'esprit). Et ne rêvons pas : il n'y a aucune "recette miracle" pour devenir bon en maths (sinon tout le monde la connaîtrait ou elle se vendrait très cher!) : seul le travail permet de progresser. Dans l'immédiat, voyons (ou revoyons) deux "outils" très fréquemment utilisés : l'I.P.P. et le principe de récurrence, et n'oubliez jamais qu' "**un calcul ne s'exécute pas, il se médite**"...

(A toutes fins utiles, on pourra également consulter, par exemple :
**http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/index.php https://www.apmep.fr/ http://exo7.emath.fr/ et https://www.maths-et-tiques.fr/** )

## 1) Intégration par parties (I.P.P.) (Ex. 2) et 3) obligatoires .)

Le principe consiste à calculer une intégrale (que l'on peut calculer... Eh oui, rien n'est parfait!) autrement que par "primitivation", i.e.: si on ne trouve pas de primitive assez facilement, c'est embêtant mais l'on peut parfois s'en sortir avec cette méthode en la "transformant" pour obtenir une "nouvelle" intégrale que l'on sait calculer ...

Théorème : $u$ et $v$ étant 2 fonctions numériques,dérivables à dérivées continues (on dit de classe $C^1$, lire "c un") sur un intervalle I, $a$ et $b$ étant des réels de I, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Remarques:

1) Cela n'a échappé à personne, la "prime" a changé de place...
2) Dans la pratique, on choisit $u'$ et $v$ ( en essayant d'évaluer la pertinence de ce choix, cf. ci-après) et on applique la formule...

Exemple : soit à calculer I=$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.
Posons $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = x$ .
On peut choisir $u(x) = \sin x$ et on a $v'(x) = 1$, $u$ et $v$ étant de classe $C^1$, on peut y aller gaiement (i.e. une I.P.P. est légitime):
I=$\displaystyle[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$ .

[1] **Vous ne pourrez peut-être pas traiter toutes les questions, cela n'est pas grave. Ce qui est demandé est de travailler les mathématiques et maîtriser les notions de base (hormis en géométrie) du programme de spécialité de terminale.**
$\boxed{!}$ **Un contrôle sur les notions utilisées dans les parties obligatoires aura lieu la semaine de la rentrée.**

[2] Ainsi que le calcul...

Exemple :

Montrons que pour tout entier naturel $n$ non nul on a $1^3+2^3+...+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+...+n)^2$ [4] Pour $n=1$ on a $1^3=1$ et $\dfrac{1^2(2)^2}{4}=1$ donc la propriéte est vraie (certains auteurs écrivent: $\mathcal{P}(1)$ est vraie).

Soit $n \geq 1$ tel que $1^3+2^3+...+n^3 = (1+2+...+n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (certains auteurs écrivent: $\mathcal{P}(n)$ est vraie, ou supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie).

Comme on a :

$1^3+2^3+...+(n+1)^3 = (1^3+2^3+...+n^3)+(n+1)^3$

d'après l'hypothèse de récurrence : $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$, soit $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1))$. Comme $(n^2+4(n+1)) = n^2+4n+4 = (n+2)^2$, il vient : $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ et la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $1^3+2^3+...+n^3 = (1+2+...+n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Remarques:

1) La première étape est parfois appelée "initialisation" et $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, "hérédité" (on dit aussi que la propriété est héréditaire).

2) 3 écueils classiques à éviter :

- Oublier d'initialiser le raisonnement...
- Se servir de $\mathcal{P}(n+1)$ pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$, et ça risque pourtant de vous arriver...
- Prouver que la propriété est vraie au rang n+1 sans se servir de l'hypothèse de récurence: dans ce cas, soit on s'est planté, soit la récurrence était inutile(il ne faut pas devenir zinzin de récurrence: montrer par récurrence que $(n+1)^2 \geq 1$ entame la crédibilité, tout comme calculer le discriminant pour obtenir les racines de $x^2+3x=0$, par exemple)...

Exercices :

1) Etablir que pour tout entier naturel $n$, $4^n+2$ est un multiple de 3
(Si l'on a fait un peu d'arithmétique, on remarque qu'il y a mieux que la récurrence ici...)

2) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul : $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{1}{1\times 2\times 3}+.\dfrac{1}{2\times 3\times 4}+...+\dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$. Montrer que l'on a : $Sn = \dfrac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$ et en déduire la limite de $S_n$.

N.B.: **pour une approche de la récurrence via les suites et voir d'autres exemples, on pourra consulter, par exemple : http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/Cours/01-recurrence.pdf**

[4] Puisque $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

## 4) Un problème d'analyse.[5] (Facultatif, mais intéressant...)

(Un petit tour d'horizon sur les fonctions, limites, dérivées, suites, intégrales...)

### Partie A

On désigne par ln le logarithme népérien et par $\mathbb{N}^*$ l'ensembles des entiers naturels strictement positifs. On considère, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

1) Déterminer les limites de $f_n$ aux bornes de l'intervalle $]0,+\infty[$, puis étudier les variations de $f_n$ .
2) Donner l'allure de $C_1$, courbe représentative de $f_1$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser ses asymptotes.
3) Pour $X$ réel supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n(X) = \displaystyle\int_1^X f_n(t)dt$.
 a) Calculer $I_1(X)$.
 b) A l'aide d'une I.P.P., calculer $I_n(X)$ en fonction de $n$ et de $X$, pour $n$ supérieur ou égal à 2. Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^X f_2(t)dt$.
 c) Pour $n$ appartenant à $\mathbb{N}^*$, calculer la limite de $I_n(X)$ quand $X$ tend vers $+\infty$ (on distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$), puis celle de $\displaystyle\int_2^X f_2(t)dt$.

### Partie B

On considère la fonction $f_2$ définie en A par : $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel $k$, $k \geq 2$ : $f_2(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f_2(t)dt \leq f_2(k)$ (on pourra encadrer $f_2(t)$ et utiliser la "comparaison d'intégrales").
2) On considère la suite $S$ définie par le terme général : $S_p = \dfrac{\ln 2}{2^2} + \dfrac{\ln 3}{3^2} + ... + \dfrac{\ln p}{p^2}$ où $p$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 a) Etablir que $S$ est croissante.
 b) En utilisant B 1), montrer que : $S_p - \dfrac{\ln 2}{2^2} \leq \displaystyle\int_2^p f_2(t)dt \leq S_p - \dfrac{\ln p}{p^2}$ (on pourra sommer les inégalités de $k = 2$ à $k = ...$),puis en déduire un encadrement de $S_p$.
 c) A l'aide la valeur de $\displaystyle\int_2^p f_2(t)dt$ trouvée en A, montrer que la suite $S$ est majorée.
 d) Prouver enfin que la suite $S$ est convergente et que sa limite $L$ vérifie [6]:
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2} \leq L \leq \dfrac{1}{2} + 3\dfrac{\ln 2}{4}$.

[5] **Qui comporte quelques questions difficiles et qu'il n'est pas recommandé d'aborder avant d'avoir bien assimilé les notions du programme intervenant ici.**

[6] on se reportera éventuellement au paragraphe " Quelques rappels sur les suites" avant de traiter cette question.

gente. (th. "de convergence des suite monotones" ou de "la limite monotone" [8])
De même, ne connaissant pas la valeur exacte d'une limite, on en cherche parfois un encadrement...
Prop. Si la suite $(u_n)$ converge vers L, et s'il existe un réel A (resp. B)tel que pour $n$ assez grand $u_n \geq A$ ( resp. $u_n \leq B$) alors $L \geq A$ (resp. $L \leq B$ ) .
Il va sans dire que les formules concernant les suites arithmétiques et géométriques (expression du terme général et somme des premiers termes) sont à connaître absolument ( si vous hésitez sur l'expression de $1 + 2 + ... + n$ (notée aussi $\sum_{k=1}^{k=n} k$), revoyez vite les notions de base sur les suites arithmétiques !)

Bon courage, bonnes révisions et...Bonnes vacances! A bientôt.

[8] cette dernière appellation est souvent réservée à son pendant pour les fonctions